ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ GAT-PAT พ.ย.57

วิชา PAT 1 : คณิตศาสตร์

ชุดที่ 1 (ตอนที่ 5/7)

โดยช่วงตั้งแต่ 7 ต.ค. - 20 พ.ย. 57 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ วันอังคารดูวิชา GAT, วันพุธดูวิชา PAT1, วันพฤหัสดูวิชา PAT2

1. ให้ v, w, x, y และ z เป็นขนาดของมุมทั้งห้าของรูปห้าเหลี่ยม (วัดเป็นองศา) สมมุติว่า $v < w < x < y < z$ และ v, w, x, y และ z เป็นลำดับเลขคณิต จงหาค่าของ x

1) 72 องศา 2) 84 องศา 3) 90 องศา 4) 108 องศา

2. ผลลัพธ์ของ $\sum_{k=1}^{3}\arctan\left(\frac{1}{k}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1) $\frac{\pi}{2}$ 2) π 3) $\frac{3\pi}{2}$ 4) $2\pi - 1$

3. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยกว่า 2002

กำหนด a_n = 11 ถ้า n หารด้วย 13 และ 14 ลงตัว

a_n = 13 ถ้า n หารด้วย 14 และ 11 ลงตัว

a_n = 14 ถ้า n หารด้วย 11 และ 13 ลงตัว

a_n = 0 สำหรับค่าอื่นๆ ของ n

จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{2001} a_n$

1) 448 2) 486 3) 1560 4) 2001

4. ถ้า f, g, h สอดคล้องกับ $f(1) = g(1) = h(1) = 1$ และ $f'(1) = g'(1) = h'(1) = 2$ แล้ว $(f\circ(gh))'(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 8 2) 4 3) 2 4) 1

5. ในการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างคะแนนสอบกลางภาค (x) และคะแนนสอบปลายภาค (y) ของนักเรียนห้องหนึ่ง ได้สมการเป็น $y = 3x - 10$ ข้อใดต่อไปนี้**ผิด**

1) ถ้านักเรียน 2 คน คะแนนกลางภาคต่างกัน 5 คะแนน จะได้คะแนนปลายภาคต่างกันโดยประมาณ 15 คะแนน

2) นักเรียนแต่ละคนจะได้คะแนนสอบปลายภาคโดยประมาณ 26 คะแนน เมื่อได้คะแนนสอบกลางภาค 12 คะแนน

3) ถ้านายแดงสอบได้คะแนนกลางภาค 10 คะแนน แล้วนายแดงจะได้คะแนนสอบปลายภาคโดยประมาณ 20 คะแนน

4) นักเรียนทุกคนสอบได้คะแนนปลายภาคมากกว่าคะแนนกลางภาค

6. สมการพหุนาม $P(x) = 0$ เมื่อ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ มีสมบัติว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคำตอบ, ผลคูณของคำตอบ และผลบวกของสัมประสิทธิ์ต่างมีค่าเท่ากัน ถ้าระยะตัดแกน y ของกราฟของ $y = P(x)$ เท่ากับ 2 จงหาค่าของ b

1) -11 2) -10 3) -9 4) 1

7. ให้ k เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k(1+2+3+\ldots+n)}{2(1)^2+3(2)^2+4(3)^2+\ldots+(n+1)n^2} = L$ โดย $L \in \mathbf{R} - \{0\}$ แล้วค่าของ $k + \frac{L}{2}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1) 5 2) 4 3) 3 4) 2

เฉลย

1. เฉลย 4) 108 องศา

รูปห้าเหลี่ยมสามารถแบ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ 3 รูป ดังนั้นผลบวกของมุมภายในรูปห้าเหลี่ยมเท่ากับ $3\cdot 180° = 540° = v + w + x + y + z$

พจน์ของลำดับเลขคณิตสามารถเขียนในรูปแบบ

$x - 2d,\ x - d,\ x,\ x + d,\ x + 2d$ เมื่อ d เป็นผลต่างร่วม

ดังนั้น $(x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 5x = 540°$

จะได้ $x = 108°$

2. เฉลย 1) $\frac{\pi}{2}$

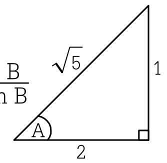
พิจารณา $\sum_{k=1}^{3}\arctan\left(\frac{1}{k}\right) = \arctan 1 + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ ...(1)

ให้ $A = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ และ $B = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ $\therefore$ $\tan A = \frac{1}{2}$ และ $\tan B = \frac{1}{3}$

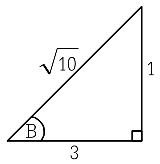
ดังนั้น $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \tan(A + B)$

$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$



$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}$

$= 1$



$\therefore$ $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ ...(2)

แทน (2) ใน (1) จะได้ $\sum_{k=1}^{3}\arctan\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

3. เฉลย 1) 448

เนื่องจาก $2002 = 11\cdot 13\cdot 14$

พิจารณาจำนวนเต็มบวก n ที่มี**ค่าน้อยกว่า** 2002

ถ้า $n = 13\cdot 14\cdot i$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, 10$ จะได้ $a_n = 11$

ถ้า $n = 14\cdot 11\cdot j$ เมื่อ $j = 1, 2, \ldots, 12$ จะได้ $a_n = 13$

ถ้า $n = 11\cdot 13\cdot k$ เมื่อ $k = 1, 2, \ldots, 13$ จะได้ $a_n = 14$

$a_n = 0$ สำหรับค่าอื่นๆ ของ n

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{2001} a_n = 11\cdot 10 + 13\cdot 12 + 14\cdot 13 + 0 = 448$

4. เฉลย 1) 8

$(f\circ(gh))'(x) = f'(gh(x))(gh)'(x)$

$= f'(g(x)\cdot h(x))[g(x)h'(x) + h(x)g'(x)]$

$\therefore$ $(f\circ(gh))'(1) = f'(g(1)\cdot h(1))[g(1)h'(1) + h(1)g'(1)]$

$= [f'(1\cdot 1)][(1\cdot 2) + (1\cdot 2)]$

$= [f'(1)][2 + 2] = 2\cdot 4 = 8$

5. เฉลย 4) นักเรียนทุกคนสอบได้คะแนนปลายภาคมากกว่าคะแนนกลางภาค

1) **ถูก** สมมติให้ ก และ ข มีคะแนนสอบกลางภาคเป็น $x_ก$ และ $x_ข$ ตามลำดับ ซึ่ง $x_ข = x_ก + 5$

จะได้ $y_ก = 3x_ก - 10$ ...(1)

$y_ข = 3x_ข - 10$

$= 3(x_ก + 5) - 10$

$= 3x_ก + 5$ ...(2)

นำ (2) − (1) ; $y_ข - y_ก = 15$

ดังนั้น ถ้าคะแนนสอบกลางภาคต่างกัน 5 คะแนน จะได้คะแนนสอบปลายภาคต่างกันโดยประมาณ 15 คะแนน

2) **ถูก** เพราะ $y = 3x - 10 = 3(12) - 10 = 26$

(สอบได้กลางภาค 12 คะแนน แทนค่า x = 12)

$\therefore$ นักเรียนแต่ละคนจะได้คะแนนสอบปลายภาคโดยประมาณ 26 คะแนน

3) **ถูก** เพราะ $y = 3x - 10 = 3(10) - 10 = 20$

(นายแดงสอบได้คะแนนกลางภาค 10 คะแนน แทนค่า x = 10)

$\therefore$ นายแดงจะได้คะแนนสอบปลายภาคโดยประมาณ 20 คะแนน

4) **ผิด** เพราะถ้า x มีค่าน้อยกว่า 5 เช่น x = 4 จะได้ $y = 3(4) - 10 = 2$ ซึ่งน้อยกว่า x

6. เฉลย 1) -11

ผลบวกและผลคูณของคำตอบของ $P(x) = 0$ คือ $-a$ และ $-c$ ตามลำดับ

เนื่องจาก ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคำตอบ, ผลคูณของคำตอบ และผลบวกของสัมประสิทธิ์ ต่างมีค่าเท่ากัน ดังนั้น

$$-\frac{a}{3} = -c = 1 + a + b + c$$

เนื่องจาก $c = P(0)$ เป็นระยะตัดแกน y ของ $y = P(x)$

จะได้ว่า $c = 2$ ดังนั้น $a = 6$ และ $b = -11$

7. เฉลย 3) 3

$2(1)^2+3(2)^2+4(3)^2+\ldots+(n+1)n^2$

$= (1+1)1^2+(1+2)2^2+(1+3)3^2+\ldots+(1+n)n^2$

$= (1^2+1^3)+(2^2+2^3)+(3^2+3^3)+\ldots+(n^2+n^3)$

$= (1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k(1+2+3+\ldots+n)}{2(1)^2+3(2)^2+4(3)^2+\ldots+(n+1)n^2}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^k\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$

เพื่อให้หา limit ได้เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0 ดีกรีของตัวเศษต้องเท่ากับตัวส่วน

$\therefore$ $k = 2$

และจะหาค่า $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2} = 2$

$\therefore$ $k + \frac{L}{2} = 2 + \frac{2}{2} = 3$

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่

www.bunditnaenaew.com